日本機械学会論文集(A編)
62巻602号(1996-10)

論文 No. 96-0210

任意個の回転だ円体状空かを持つ無限体の非軸対称一軸引張りにおける干渉効果*

野田尚昭*1, 小笠原 望*2, 松尾忠利*3

Interaction Effect among a Row of Ellipsoidal Cavities in an Infinite Body under Uniaxial Tension

Nao-Aki NODA, Nozomu OGASAWARA and Tadatoshi MATSUO

This paper deals with the numerical solution of singular integral equations of the body force method in the interaction problem for a row of ellipsoidal cavities under uniaxial tension. The problem is solved by the superposition of two auxiliary loads: (i) biaxial tension and (ii) plane state of pure shear. These problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type singularities, where the densities of body forces distributed in the r, θ and z directions are unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the ellipsoidal boundaries, eight kinds of fundamental density functions proposed in our previous paper are applied. In the analysis, the number, shape, and distance of cavities are varied systematically; then the magunitude and position of the maximum stress are examined. For any fixed shape and size of cavities, the maximum stress is shown to be linear with the reciprocal of the squared number of cavities.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Stress Concentration Factor, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Ellipsoidal Cavity, Uniaxial Tension, Interaction Effect

1. 緒 言

内部欠陥を持つ部材の強度評価に関連して, 複数個の回転だ円体状空かを有する無限体の引張問題は重要な応力集中問題の一つである.

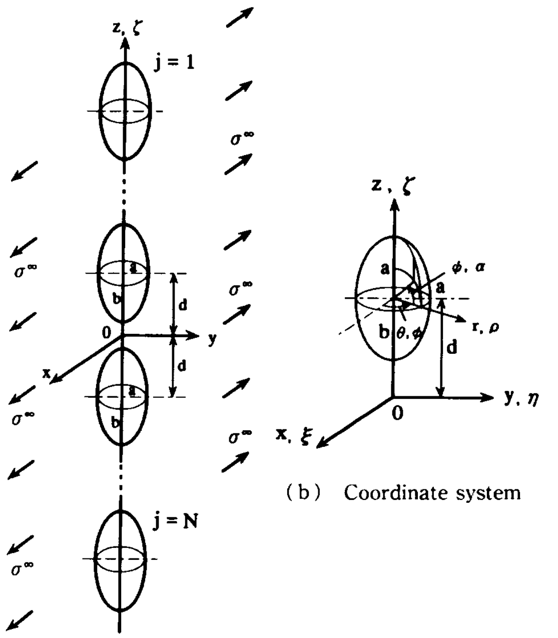
著者らは前報(1)において, 2個の回転だ円体状空かを有する無限体の非軸対称一軸引張問題について, 体積力法の特異積分方程式を厳密に解析する方法を用いて, 応力集中の干渉効果を明らかにした. 今までに球かや回転だ円体状空かを有する無限体の軸対称問題(2)~(14)の解析は多くなされていたが, より重要な非軸対称一軸引張問題の解析例は少なく, 3個以上の空かに関する干渉問題については, 球かに関する土田ら(11)の解析以外見当たらない.

そこで, 本報では, 前報(1)の解法を拡張して, 任意個の回転だ円体状空かを有する無限体の応力集中問題を解析する. さらに, 形状比と距離を系統的に変化させ, 応力集中の干渉効果を調べた.

* 原稿受付 1996年2月15日.
*1 正員, 九州工業大学工学部(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1).
*2 学生員, 九州工業大学大学院.
*3 正員, 九州工業大学大学院.

2. 解析方法

図1(a)に示すような, 主軸長$2a$, $2b$のN個の等



(b) Coordinate system

(a) Uniaxial tension of a row of ellipsoidal cavities

Fig. 1 Problem and coordinate system

NII-Electronic Library Service

大回転だ円体状空かを有する無限体が遠方で一様な x 方向の一軸引張応力 σ^∞ を受けている干渉問題を体積力法の特異積分方程式を用いて解析する．本問題は，前報[1]と同様に二つの問題(二軸引張問題，純粋せん断問題)の重ね合わせにより構成される．いま直角座標系を (x, y, z) とし，円筒座標系を (r, θ, z) として図1(b)のように定義する［着力点に関する座標の記号は，(ξ, η, ζ) と (ρ, ϕ, ζ) とする］．二軸引張問題については，軸対称問題であるので，詳細[12]は省略する．以下では，純粋せん断問題で空かの個数が N 個(N：偶数)の場合の解法を中心に説明する**1．

この問題は，重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により，空かのない無限体中の二つの円周上［$\rho = a\cos\alpha_k$, $\zeta = \pm\{d + 2d(k-1) + b\sin\alpha_k\}$, $k = 1 \sim N/2$］に大きさが $\cos 2\phi$ または $\sin 2\phi$ で変化する集中力の輪が作用するときの任意の点［$r = a\cos\psi_i$, $z = d + 2d(i-1) + b\sin\psi_i$, $i = 1 \sim N/2$］の応力場の解 ($K_{nn}^{Fr} + K_{nn}^{F\theta}$, K_{nn}^{Fz}, $K_{nt}^{Fr} + K_{nt}^{F\theta}$, K_{nt}^{Fz}) を用いて解くことができる(α_k は回転だ円体状境界の着力点を表すパラメータである．K_{nn}^{Fr} 等の具体的な表現は紙面の都合により省略する)．

このとき問題は，k 番め($k = 1 \sim N/2$)の空かとなるべき仮想境界上に分布させた面積 $\rho d\phi ds$ ($ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (d\zeta)^2}$) の微小要素に作用させた体積力密度 $\rho_r^*(\alpha_k)$, $\rho_\theta^*(\alpha_k)$, $\rho_z^*(\alpha_k)$ を未知関数とする特異積分方程式(1)で表現される．

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{2}\right)\{\rho_r^*(\psi_i)\cos\psi_{i0} + \rho_z^*(\psi_i)\sin\psi_{i0}\} + \sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fr}(\alpha_k, \psi_i)\rho_r^*(\alpha_k)ds + \sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{F\theta}(\alpha_k, \psi_i)\rho_\theta^*(\alpha_k)ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fz}(\alpha_k, \psi_i)\rho_z^*(\alpha_k)ds = -\sigma_r^\infty \cos^2\psi_{i0}\cos 2\theta \\
&\left(-\frac{1}{2}\right)\{-\rho_r^*(\psi_i)\sin\psi_{i0} + \rho_z^*(\psi_i)\cos\psi_{i0}\} + \sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{Fr}(\alpha_k, \psi_i)\rho_r^*(\alpha_k)ds + \sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{F\theta}(\alpha_k, \psi_i)\rho_\theta^*(\alpha_k)ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{Fz}(\alpha_k, \psi_i)\rho_z^*(\alpha_k)ds = -\sigma_r^\infty \sin\psi_{i0}\cos\psi_{i0}\cos 2\theta \\
&\quad i = 1 \sim N/2 \qquad\cdots\cdots(1)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\left.
\begin{aligned}
&-d\rho = a\sin\alpha_k d\alpha_k,\ d\zeta = b\cos\alpha_k d\alpha_k \\
&ds = \sqrt{a^2\sin^2\alpha_k + b^2\cos^2\alpha_k}\,d\alpha_k
\end{aligned}
\right\} \qquad\cdots\cdots(2)
$$

である．また，ψ_{i0} は i 番めの空かの境界上の点 (r, z) における空かの外向き法線と r 軸のなす角度であり，$\sigma_r^\infty\cos 2\theta$ は $r\to\infty$ での純粋せん断応力場である．$\sum_{k=1}^{N/2}$ は N 個の回転だ円体状空かとなるべき仮想境界について体積力密度を積分することを意味する．

式(1)は仮想境界上における境界条件 $\sigma_n = 0$, $\tau_{nt} = 0$ に相当している．式(1)の第1項は，体積力を一境界に作用させたとき仮想境界上に生じる応力の項である．式(1)の第2，第3項は，$\psi_i = \alpha_k$, $i = k$ のとき $1/\sin\{(\psi_i - \alpha_k)/2\}$ の特異性を有する項を含む．その場合には，積分のコーシーの主値をとるものとする．特異積分方程式［式(1)］の未知関数である $\rho_r^*(\alpha_k)$, $\rho_\theta^*(\alpha_k)$, $\rho_z^*(\alpha_k)$ は次式で定義される．

$$
\rho_r^*(\alpha_k)\cos 2\phi = \frac{dF_r}{\rho d\phi ds},\ \rho_\theta^*(\alpha_k)\sin 2\phi = \frac{dF_\theta}{\rho d\phi ds},\ \rho_z^*(\alpha_k)\cos 2\phi = \frac{-dF_z}{\rho d\phi ds} \qquad\cdots\cdots(3)
$$

ここで，dF_r, dF_θ, dF_z は，面積 $\rho d\phi ds$ の微小面素に作用する体積力の合力の r, θ および z 方向の成分である．

前報[1]と同様に，r, θ および z 方向の体積力の基本密度関数 $w_r(\alpha_k)$, $w_\theta(\alpha_k)$ および，$w_z(\alpha_k)$ を次式で定義する．

$$
\begin{aligned}
&w_{r1}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k)/\cos\alpha_k,\ w_{r2}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k)\tan\alpha_k,\ w_{r3}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k),\ w_{r4}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k)\sin\alpha_k \\
&w_{\theta1}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k)/\cos\alpha_k,\ w_{\theta2}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k)\tan\alpha_k,\ w_{\theta3}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k),\ w_{\theta4}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k)\sin\alpha_k \\
&w_{z1}(\alpha_k) = n_z(\alpha_k)/\sin\alpha_k,\ w_{z2}(\alpha_k) = n_z(\alpha_k),\ w_{z3}(\alpha_k) = n_z(\alpha_k)\cot\alpha_k,\ w_{z4}(\alpha_k) = n_z(\alpha_k)\cos\alpha_k
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(4)
$$

ここで，$n_r(\alpha_k)$, $n_z(\alpha_k)$ は，仮想境界上の点 (r, z) における単位外向き法線ベクトルの r, z 方向の座標成分 ($\cos\psi_{i0}$, $\sin\psi_{i0}$) であり，次式で表される．

**1 空かの個数が奇数個の場合もほぼ同様の解法で解析可能であるが，最内側の空かについては，問題の対称性より $0 \leqq \psi \leqq \pi/2$ で境界条件を満足すればよいという点が異なる．

NII-Electronic Library Service

$$n_r(\alpha_k)=\frac{b\cos\alpha_k}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha_k+b^2\cos^2\alpha_k}},\ n_z(\alpha_k)=\frac{a\sin\alpha_k}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha_k+b^2\cos^2\alpha_k}} \quad\cdots\cdots(5)$$

すなわち，本解析では，式(4)で定義される基本密度関数と重み関数の組合せによって $\rho_r^*(\alpha_k)$, $\rho_\theta^*(\alpha_k)$, $\rho_z^*(\alpha_k)$ を表現する．

いま，問題の性質($\alpha_k=90°$ に関する対称性)を考慮して，基本密度関数として，$w_{r3}(\alpha_k)$, $w_{r4}(\alpha_k)$, $w_{\theta3}(\alpha_k)$, $w_{\theta4}(\alpha_k)$, $w_{z1}(\alpha_k)$, $w_{z2}(\alpha_k)$ を採用すれば，$\rho_r^*(\alpha_k)$, $\rho_\theta^*(\alpha_k)$, $\rho_z^*(\alpha_k)$ は，$\alpha_k=0$ で対称な未知関数 $\rho_{r3}(\alpha_k)$, $\rho_{r4}(\alpha_k)$, $\rho_{\theta3}(\alpha_k)$, $\rho_{\theta4}(\alpha_k)$, $\rho_{z1}(\alpha_k)$, $\rho_{z2}(\alpha_k)$ を用いて式(6)で表される．

$$\rho_r^*(\alpha_k)=\rho_{r3}(\alpha_k)w_{r3}(\alpha_k)+\rho_{r4}(\alpha_k)w_{r4}(\alpha_k),\ \rho_\theta^*(\alpha_k)=\rho_{\theta3}(\alpha_k)w_{\theta3}(\alpha_k)+\rho_{\theta4}(\alpha_k)w_{\theta4}(\alpha_k)$$
$$\rho_z^*(\alpha_k)=\rho_{z2}(\alpha_k)w_{z2}(\alpha_k)+\rho_{z1}(\alpha_k)w_{z1}(\alpha_k) \quad\cdots\cdots(6)$$

したがって，問題は式(7)の特異積分方程式で表現される．

$$\left(-\frac{1}{2}\right)[\{\rho_{r3}(\psi_i)+\rho_{r4}(\psi_i)\sin\psi_i\}\cos^2\psi_{i0}+\{\rho_{z2}(\psi_i)+\rho_{z1}(\psi_i)/\sin\psi_i\}\sin^2\psi_{i0}]$$
$$+\sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{nn}^{Fr}(\alpha_k,\psi_i)\{\rho_{r3}(\alpha_k)+\rho_{r4}(\alpha_k)\sin\alpha_k\}b\cos\alpha_k d\alpha_k$$
$$+\sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{nn}^{F_\theta}(\alpha_k,\psi_i)\{\rho_{\theta3}(\alpha_k)+\rho_{\theta4}(\alpha_k)\sin\alpha_k\}b\cos\alpha_k d\alpha_k$$
$$+\sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{nn}^{Fz}(\alpha_k,\psi_i)\{\rho_{z2}(\alpha_k)+\rho_{z1}(\alpha_k)/\sin\alpha_k\}a\sin\alpha_k d\alpha_k=-\sigma_r^\infty\cos^2\psi_{i0}\cos 2\theta$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)[-\{\rho_{r3}(\psi_i)+\rho_{r4}(\psi_i)\sin\psi_i\}+\{\rho_{z2}(\psi_i)+\rho_{z1}(\psi_i)/\sin\psi_i\}]\sin\psi_{i0}\cos\psi_{i0}$$
$$+\sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{nt}^{Fr}(\alpha_k,\psi_i)\{\rho_{r3}(\alpha_k)+\rho_{r4}(\alpha_k)\sin\alpha_k\}b\cos\alpha_k d\alpha_k$$
$$+\sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{nt}^{F_\theta}(\alpha_k,\psi_i)\{\rho_{\theta3}(\alpha_k)+\rho_{\theta4}(\alpha_k)\sin\alpha_k\}b\cos\alpha_k d\alpha_k$$
$$+\sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}K_{nt}^{Fz}(\alpha_k,\psi_i)\{\rho_{z2}(\alpha_k)+\rho_{z1}(\alpha_k)/\sin\alpha_k\}a\sin\alpha_k d\alpha_k=-\sigma_r^\infty\sin\psi_{i0}\cos\psi_{i0}\cos 2\theta$$
$$i=1\sim N/2 \quad\cdots\cdots(7)$$

純粋せん断問題では，つねに $\rho_r^*(\alpha_k)=\rho_\theta^*(\alpha_k)$ となることに注意して，未知関数を連続関数として近似するために次のような表現を用いる．

$$\begin{pmatrix}\rho_{r3}(\alpha_k)=\rho_{\theta3}(\alpha_k)=\sum_{n=1}^{M/2}a_{kn}t_n(\alpha_k)\\ \rho_{r4}(\alpha_k)=\rho_{\theta4}(\alpha_k)=\sum_{n=1}^{M/2}b_{kn}t_n(\alpha_k),\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_{z2}(\alpha_k)=\sum_{n=1}^{M/2}c_{kn}t_n(\alpha_k)\\ \rho_{z1}(\alpha_k)=\sum_{n=1}^{M/2}d_{kn}t_n(\alpha_k)\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots(8)$$

$$t_n(\alpha_k)=\cos\{2(n-1)\alpha_k\} \quad\cdots\cdots(9)$$

ここで，M は，$-\pi/2\leqq\alpha\leqq\pi/2$ の範囲の選点数である．以上の離散化の方法により，式(7)の積分方程式は，式(11)で示される $2M\times N/2$ 元の連立方程式に還元される．

境界条件を満足させる点は，式(10)で定義される．

$$\psi_{il}=\left(\frac{\pi}{M}\right)(l-0.5)-\frac{\pi}{2},\ i=1\sim N/2,\ l=1\sim M \quad\cdots\cdots(10)$$

$$\sum_{k=1}^{N/2}\sum_{n=1}^{M/2}(a_{kn}A_{kn}+b_{kn}B_{kn}+c_{kn}C_{kn}+d_{kn}D_{kn})=-\sigma_r^\infty\cos^2\psi_{i0}\cos 2\theta$$
$$\sum_{k=1}^{N/2}\sum_{n=1}^{M/2}(a_{kn}E_{kn}+b_{kn}F_{kn}+c_{kn}G_{kn}+d_{kn}H_{kn})=-\sigma_r^\infty\sin\psi_{i0}\cos\psi_{i0}\cos 2\theta \quad\cdots\cdots(11)$$

$$A_{kn}=\left(-\frac{1}{2}\right)t_n(\psi_i)\cos^2\psi_{i0}+\sum_{k=1}^{N/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\{K_{nn}^{Fr}(\alpha_k,\psi_i)+K_{nn}^{F_\theta}(\alpha_k,\psi_i)\}t_n(\alpha_k)b\cos\alpha_k d\alpha_k \quad\cdots\cdots(12)$$

$B_{kn}\sim H_{kn}$ も式(12)と同様な形で表現できる．

任意の点の応力は，係数 a_{kn}, b_{kn}, c_{kn}, d_{kn} と $A_{kn}\sim H_{kn}$ に相当する影響係数の一次結合で表される．

以上の解析方法により無限体中の任意個の等大回転だ円体状空かの非軸対称一軸引張りにおける干渉効果について，空かの個数，形状比と距離を系統的に変化させて解析する．

NII-Electronic Library Service

3. 解析結果および考察

本解析法は，だ円体の形状が偏平，偏長を問わず形状比 a/b の広範囲で有効である．以下では前報[1]と同様に干渉効果が比較的大きくなる $a/b \leq 1$ についての結果を述べる．表1に本解析における応力集中係数の収束状況を示す．表1は，図2(a)に示す無限体中の等大3球かの問題において，形状比 $b/d=0.9$, $\sigma^\infty=1$, $\nu=0.3$ の場合の最大応力を発生する内側の空かについての二軸引張問題，純粋せん断問題および一軸引張問題における選点数 M と応力集中係数 K_t を示している．本解析結果は，$M=24$ 程度で有効数字5けた程度収束しており，良好な収束性を示している．

次に表2に，等大3球かの問題［図2(a)］で，a/d を変化させたときの内側および外側の空かの最大応力の値とその発生位置，さらに外側の空か($j=1$)のA点($\phi=+90°$)およびB点($\phi=-90°$)，内側の空か($j=2$)のC点($\phi=+90°$)における応力集中係数 K_t を，土田らの結果[11]とともに示す．両者はほとんどの場合で有効数字4けたまで一致する．

Table 1 Convergency of stress concentration factor $\sigma_\theta|_{\theta=\pi/2}/\sigma^\infty$ at the central spherical boundaries ($N=3$, $a/b=1.0$, $b/d=0.9$, $\nu=0.3$)

ϕ (deg.)	M	Biaxial	Pure shear	Uniaxial
0.	12	1.4675	2.9102	2.1889
	16	1.4673	2.9121	2.1897
	20	1.4677	2.9121	2.1899
	24	1.4681	2.9120	2.1900
	28	1.4682	2.9120	2.1901
30.	12	1.7030	2.7790	2.2410
	16	1.7024	2.7816	2.2420
	20	1.7019	2.7816	2.2418
	24	1.7024	2.7814	2.2419
	28	1.7024	2.7814	2.2419
60.	12	2.2178	2.6313	2.4246
	16	2.2176	2.6338	2.4257
	20	2.2178	2.6338	2.4258
	24	2.2179	2.6337	2.4258
	28	2.2179	2.6338	2.4258
80.	12	2.7030	2.7546	2.7288
	16	2.7022	2.7540	2.7281
	20	2.7024	2.7538	2.7281
	24	2.7025	2.7538	2.7282
	28	2.7026	2.7538	2.7282
90.	12	2.8393	2.7780	2.8087
	16	2.8397	2.7775	2.8086
	20	2.8393	2.7776	2.8085
	24	2.8392	2.7776	2.8084
	28	2.8392	2.7776	2.8084

Table 2 Stress concentration factors in Fig. 2(a) ($N=3$, $a/b=1.0$)

a/d	j = 1				j = 2		
	ϕ (deg.)	Ktmax	KtA	KtB	ϕ (deg.)	Ktmax	KtC
0	−90~90 (−90~90)	2.0455 (2.045)	2.0455 (2.045)	2.0455 (2.045)	−90~90 (−90~90)	2.0455 (2.045)	2.0455 (2.045)
0.1	−9	2.0456	2.0454	2.0454	0	2.0456	2.0454
0.2	−9 (−10)	2.0463 (2.046)	2.0454 (2.045)	2.0448 (2.045)	0 (0)	2.0469 (2.047)	2.0448 (2.045)
0.3	−13	2.0484	2.0456	2.0425	0	2.0504	2.0429
0.4	−19 (−15)	2.0532 (2.053)	2.0464 (2.046)	2.0377 (2.038)	0 (0)	2.0576 (2.057)	2.0389 (2.039)
0.5	−24	2.0624	2.0484	2.0310	±1	2.0698	2.0339
0.6	−33 (−30)	2.0798 (2.077)	2.0520 (2.052)	2.0315 (2.031)	±22 (±15)	2.0889 (2.087)	2.0366 (2.036)
0.7	−43	2.1136	2.0575	2.0715	±40	2.1242	2.0790
0.8	−90 (−90)	2.2433 (2.241)	2.0650 (2.065)	2.2433 (2.241)	±90 (±90)	2.2523 (2.251)	2.2523 (2.251)
0.9	−90	2.8011	2.0749	2.8011	±90	2.8084	2.8084

( ) : Tsuchida et al.[11]

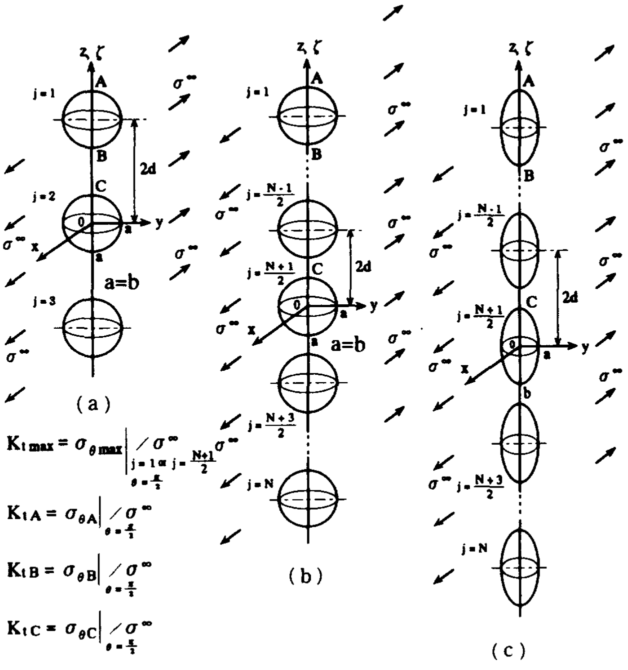


Fig. 2 Problem solved

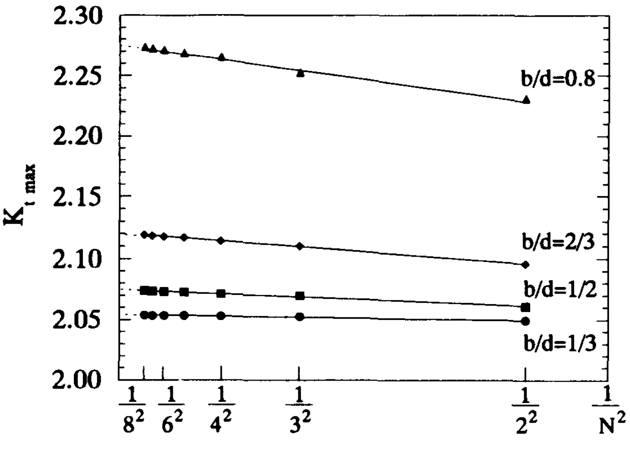


Fig. 3 Relationship between $K_{t\,max}$ and $1/N^2$ in Fig. 2(b) ($a/b=1.0$, $\theta=\pi/2$)

NII-Electronic Library Service

Table 3　Extrapolated stress concentration factors in Fig. 2(b)　($N \to \infty$, $a/b=1.0$)

a/d	Outermost cavity (j = 1)				Central cavity (j = (N+1) / 2)		
	ϕ(deg.)	Ktmax	KtA	KtB	ϕ(deg.)	Ktmax	Ktc
0	−90〜90	2.046	2.046	2.046	−90〜90	2.046	2.046
0.1	−9	2.046	2.045	2.044	0	2.046	2.045
0.2	−9	2.046	2.045	2.043	0	2.047	2.044
0.3	−12	2.049	2.046	2.042	0	2.051	2.043
0.4	−18	2.054	2.046	2.038	0	2.060	2.039
0.5	−24	2.063	2.049	2.031	0	2.075	2.034
0.6	−32	2.081	2.052	2.032	±16	2.097	2.040
0.7	−42	2.116	2.058	2.074	±37	2.136	2.089
0.8	−90	2.248	2.066	2.248	±90	2.276	2.276
0.9	−90	2.812	2.078	2.812	±90	2.863	2.863

図3は，図2(b)に示すN個の空かの問題で，形状比$a/b=1.0$の場合について，$b/d=1/3, 1/2, 2/3, 0.8$における最大応力$K_{t\,max}$と空かの個数の逆数の二乗$1/N^2$の関係を示したものである．著者らがさきに示した任意個の回転だ円体状介在物に関する三次元軸対称問題[14]と同様に，非軸対称一軸引張り(三次元)の干渉問題においても，$K_{t\,max}$と$1/N^2$の間に直線関係がほぼ成り立つことがわかる．

表3は，前述の直線関係を利用して，図2(b)に示すN個の球か($a/b=1.0$)の問題で，a/dを変化させたときの$N \to \infty$の結果を外挿によって求めたものである．表3では，最外側の空か($j=1$)の最大応力の値とその発生位置と，A点，B点($\phi=\pm 90°$)の応力，ならびに最内側の空か$[j=(N+1)/2]$の最大応力の値と

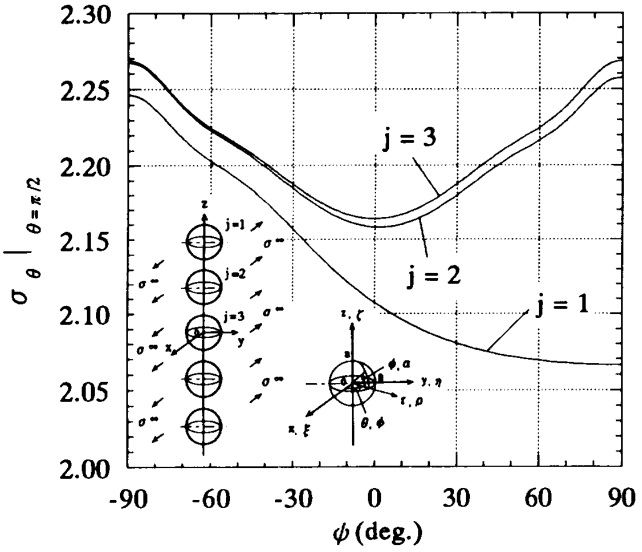


Fig. 4　Distribution of stress σ_θ in Fig. 2(b)
($N=5$, $a/b=1.0$, $b/d=0.8$, $\theta=\pi/2$)

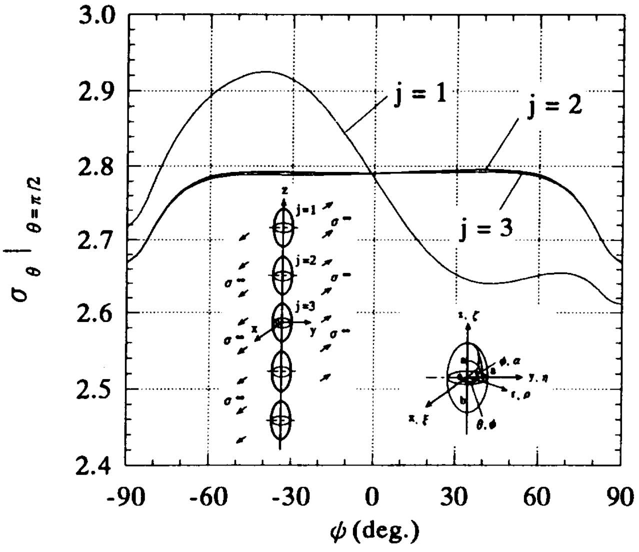


Fig. 5　Distribution of stress σ_θ in Fig. 2(c)
($N=5$, $a/b=1/4$, $b/d=0.8$, $\theta=\pi/2$)

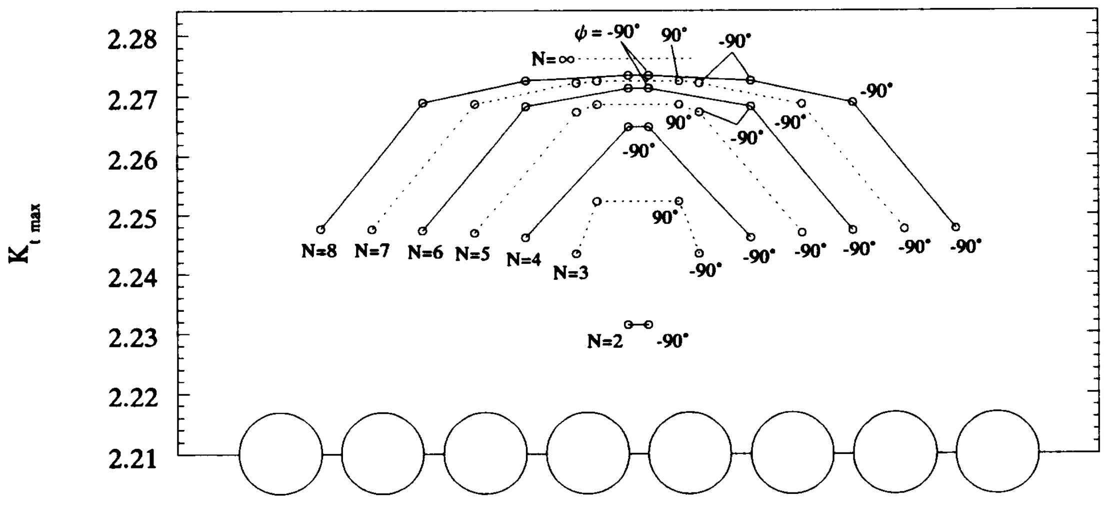


Fig. 6　Variation of $K_{t\,max}$ of infinite body containing a row of spherical cavities
($a/b=1.0$, $b/d=0.8$, $\theta=\pi/2$)

NII-Electronic Library Service

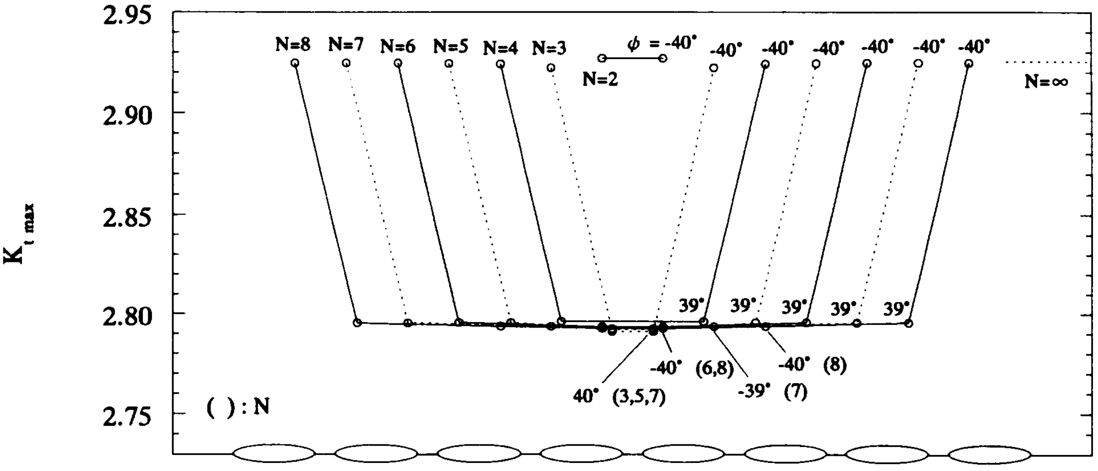


Fig. 7　Variation of $K_{t\,max}$ of infinite body containing a row of ellipsoidal cavities ($a/b=1/4$, $b/d=0.8$, $\theta=\pi/2$)

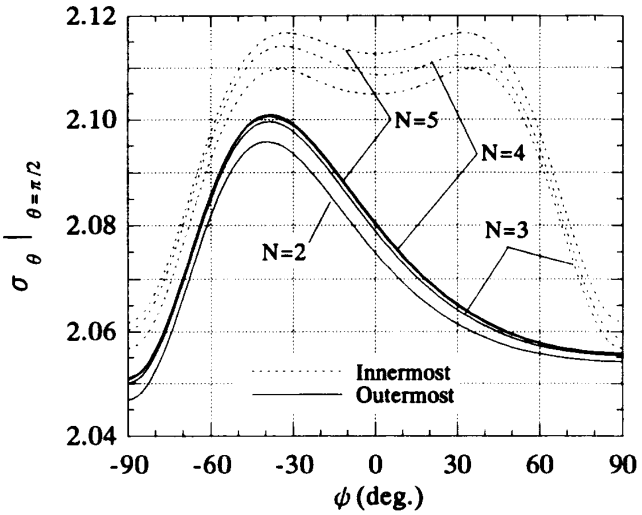


Fig. 8　Distribution of stress at the innermost and outermost cavity in Fig. 2(b) ($a/b=1.0$, $b/d=2/3$, $\theta=\pi/2$)

その発生位置と，C点($\phi=+90°$)における応力を示している．

図4，5は空かの個数$N=5$について，形状比$a/b=1.0$，$b/d=0.8$(図4)と，$a/b=1/4$，$b/d=0.8$(図5)の$j=1$～3番めの空かにおける応力分布を示す．また，図6，7は空かの個数$N=2$～8に対し，形状比$a/b=1.0$，$b/d=0.8$(図6)と，$a/b=1/4$，$b/d=0.8$(図7)の場合について，おのおのの空かの境界上に生じる最大応力とその発生位置を示したものである．図4～7より，最外側の空かを除き，各空かの応力分布と最大応力はかなりよく似ていることがわかる．また，形状寸法比(a/b，b/d)の変化に伴って，最大応力が最内側の空かの境界上に生じる場合と，最外側の空かの境界上に生じる場合とがあることがわかる．

図8は，形状比$a/b=1.0$と寸法比$b/d=2/3$と固定して，空かの個数Nを変化させたときの，最内側の空か(実線)と最外側の空か(点線)の応力分布を示す．それぞれの場合について，個数Nが大きくなるに従って，応力分布が$N\to\infty$の場合に収束していく様子がうかがえる．

Table 4　Extrapolated stress concentration factors in Fig. 2(c)　($N\to\infty$)

a/b	b/d	Outermost cavity (j = 1)				Central cavity (j = (N+1)/2)		
		φ (deg.)	Ktmax	KtA	KtB	φ (deg.)	Ktmax	KtC
1	0	−90～90	2.046	2.046	2.046	−90～90	2.046	2.046
	1/3	−14	2.050	2.046	2.041	0	2.054	2.042
	1/2	−24	2.063	2.049	2.031	0	2.075	2.034
	2/3	−38	2.102	2.056	2.051	±31	2.120	2.064
	0.8	−90	2.248	2.066	2.248	±90	2.276	2.276
	0.9	−90	2.812	2.078	2.812	±90	2.863	2.863
1/2	0	0	2.480	2.417	2.417	0	2.480	2.417
	1/3	−1	2.482	2.418	2.417	0	2.483	2.417
	1/2	−7	2.485	2.418	2.416	0	2.490	2.417
	2/3	−26	2.497	2.420	2.416	0	2.505	2.419
	0.8	−48	2.533	2.420	2.441	±46	2.538	2.446
	0.9	−70	2.657	2.418	2.644	±70	2.654	2.645
1/4	0	0	2.777	2.659	2.659	0	2.777	2.659
	1/3	−15	2.782	2.654	2.654	0	2.778	2.655
	1/2	−30	2.790	2.624	2.633	0	2.780	2.662
	2/3	−37	2.825	2.645	2.672	0	2.785	2.663
	0.8	−40	2.925	2.630	2.676	±40	2.792	2.670
	0.9	−42	3.152	2.552	2.818	±62	2.813	2.704

最後に，図2(c)で，形状比$a/b=1.0, 1/2, 1/4$について，b/dを変化させたときの最大応力の値とその発生位置，さらにA点，B点およびC点における空かの個数が無限大のときの応力集中係数K_tを，外挿によ

NII-Electronic Library Service

って求めたものを表4に示す．表4では，最大応力がほとんどの場合で最内側すべての空かに発生するが，形状比が $a/b=1/2$ で寸法比 $b/d=0.9$ と $a/b=1/4$ のすべての場合については最外側の空かに発生することが確認された．

4. 結　言

本研究では，体積力法の特異積分方程式を利用して，任意個の一列等大回転だ円体状空かを有する無限体の非軸対称一軸引張問題の干渉効果を厳密に解析した．得られた結果を表2～4にまとめたほか，以下のような結論が得られた．

（1） 任意個の空かを有する無限体が2種類の荷重を受ける問題(二軸引張り，純粋せん断)を厳密に解析し，これらを重ね合わせることにより非軸対称問題(一軸引張り)に発展させた．本解析結果は，それぞれの場合について少ない選点数で良好な収束性が得られた(表1)．また，等大3球かの土田らの解析結果[11]と本解析結果は，有効数字4けた程度までよく一致した(表2)．

（2） 最外側の空かを除き各空かの応力分布と最大応力は互いによく似ている(図4～7)．また，最大応力が生じる空かの位置は，空かの形状比の変化に依存しており，最内側の空かの境界上に生じる場合と，最外側の空かの境界上に生じる場合とがあることがわかった(図4～7，表4)．

（3） 最大応力と空かの個数の逆数の二乗は，ほぼ直線関係にあることが認められた(図2)．この性質によって，空かの個数が無限大のときの最大応力の極限値とその発生位置を示した(表3，4)．

文　献

（1） 野田尚昭・小笠原望・松尾忠利，回転だ円体状空かの非軸対称一軸引張りにおける干渉効果，機論，**62**-596，A (1996)，1051-1058.

（2） Edwards, R. H., Stress Concentrations Around Spheroidal Inclusions and Cavities, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **19**-1 (1952), 19-30.

（3） Eubanks, R. A., Stress Interference in Three-Dimensional Torsion, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Ser. E, **32**-1 (1965), 21-25.

（4） Shelly, J. F. and Yu, Yi-Yuan, The Effect of Two Rigid Spherical Inclusions on the Stresses in an Infinite Elastic Solid, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Ser. E, **33**-1 (1966), 68-74.

（5） Goree, J. G. and Wilson, H. B., Axisymmetric Torsional Stresses in a Solid Containing Two Partially Bonded Rigid Spherical Inclusions, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Ser. E, **34**-2 (1967), 313-320.

（6） Atsumi, A., Stresses in a Circular Cylinder Having an Infinite Row of Spherical Cavities Under Tension, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Ser. E, **27**-1 (1960), 87-92.

（7） 宮本博，二つ以上の球かを有する弾性体に関する弾性問題(第1報，理論計算)，機論，**23**-131 (1957)，431-436.

（8） 西谷弘信，切欠き干渉効果の近似計算法とその応用，機誌，**71**-589 (1968)，35-47.

（9） 西谷弘信，回転だ円体空か列を有する弾性体の引張り，機論，**29**-200 (1963)，765-768.

(10) 土田栄一郎・中原一郎・小玉正雄，数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題(第1報，2球かを有する弾性体)，機論，**42**-353 (1976)，46-54.

(11) 土田栄一郎・内山直人・中原一郎・小玉正雄，数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題(第2報，3球かを有する弾性体)，機論，**44**-382 (1978)，1876-1883.

(12) 野田尚昭・松尾忠利，応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法(第3報，三次元問題への応用)，機論，**59**-564，A (1993)，1964-1970.

(13) 野田尚昭・松尾忠利・原田昭治・中村資生，特異積分方程式による回転だ円体状介在物の干渉効果の解析，機論，**61**-585，A (1995)，965-973.

(14) 松尾忠利・野田尚昭・原田昭治，任意個の回転だ円体状介在物を持つ無限体の引張り，機論，**62**-597，A(1996)，1226-1233.

NII-Electronic Library Service